基于四元数非局部低秩和全变分的图像混合噪声去噪算法

李潇瑶[1,2]，王炼红[1]，周怡聪[2]，章　兢[1]
（1. 湖南大学电气与信息工程学院，湖南长沙 410082；2. 澳门大学电脑与资讯科学系，澳门 999078）

摘　要： 许多彩色图像去噪算法没有充分利用图像块间和颜色分量间的相关性，在去噪时丢失大量细节，容易导致颜色失真，从而影响后续处理．此外，真实的图像噪声通常是高斯-脉冲混合噪声而不是单一类型的，导致许多成熟的仅针对加性高斯噪声或脉冲噪声的去噪算法无法直接使用于真实场景．为解决这些问题，本文提出了基于四元数非局部低秩和全变分的图像混合噪声去除算法．该算法首先将彩色图像从空间域转换至四元数域，然后计算图像的非局部结构相似性和局部梯度，利用四元数域下的L_1范数最小化模型，最终实现图像去噪．与现有的彩色图像去噪算法相比，该算法能更有效地保留图像块间、块内以及颜色分量间的相关性．去噪实验结果表明，本文算法在峰值信噪比和结构相似性上分别提高0.21~3.04 dB和1.51%~14.51%，并能在有效去噪和抑制伪影的同时，更好地保持图像细节和颜色信息，对噪声类型和强度变化更具鲁棒性．

关键词： 图像去噪；混合噪声；四元数；非局部相似性；低秩；全变分

基金项目： 国家重点研发计划（No.2019YFE0105300）；国家自然科学基金（No.61573299）；中国高校产学研创新基金重点项目（No.2019ITA01016）

中图分类号： TN911.73　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112(2023)04-0975-09

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn　　**DOI:** 10.12263/DZXB.20210790

Image Mixed Denoising Using Quaternion-Based Non-Local Low Rank and Total Variation

LI Xiao-yao[1,2], WANG Lian-hong[1], ZHOU Yi-cong[2], ZHANG Jing[1]
（1. *College of Electrical and Information Engineering*, *Hunan University*, *Changsha*, *Hunan* 410082, *China*;
2. *Department of Computer and Information Science*, *University of Macau*, *Macau* 999078, *China*）

Abstract: Many color image denoising methods fail to fully consider the correlations among color channels and lose many details. These always cause color distortion in the denoising results and even affect subsequent image processing tasks. In addition, the realistic noise often consists of different types of noise, such as the mixed Gaussian-impulsive noise, instead of single type. This leads to the failure of direct application in real-world image denoising for some existing denoising methods aiming at only additional Gaussian noise or only impulsive noise. To solve these problems, this paper proposes a mixed noise removal method named quaternion-based non-local low rank and total variation. The proposed method first converts the color image from spatial domain to quaternion domain, captures the non-local similarity and local gradient information and then applies the quaternion-based L_1-regularized minimization model to denoise color images. Compared with many existing color denoising methods, the proposed method can keep the within-patch, cross-patch and cross-channel correlations of color images. Compared with other competing methods, the proposed method improves the peak signal-to-noise ratio and structure similarity by 0.21~3.04 dB and 1.51%~14.51%, respectively. The visual results demonstrate the superiority of the proposed method in preserving image details and color information while removing noise and reducing artifacts. Furthermore, the proposed method is robust to noise type and noise level.

Key words: image denoising; mixed noise; quaternion; non-local similarity; low rank; total variation

Foundation Item(s): National Key Research and Development Program of China (No.2019YFE0105300); National Natural Science Foundation of China (No.61573299); Industry-University-Research Innovation Foundation for Chinese Universities (No.2019ITA01016)

收稿日期：2021-06-24；修回日期：2021-12-29；责任编辑：孙瑶

1 引言

图像在采集、传输和存储的过程中，经常会受到各种噪声的污染，从而降低图像质量，甚至影响到增强、识别、分类、分割等[1~4]后续图像处理工作．图像去噪的目的是在消除噪声的同时最大限度保留图像细节信息．因此，图像去噪是一种非常重要的图像预处理工作．图像中普遍出现的两类噪声是加性高斯噪声和脉冲噪声，前者通常用噪声的标准差（σ）来反映图像受噪声污染的严重程度，后者则用噪声比例或噪声密度（d）描述噪声强度．

针对加性高斯噪声的去除，Buades 等人[5]提出了非局部均值（Non-Local Means，NLM）算法．不同于传统基于像素的局部滤波算法，NLM 算法将图像块作为一个处理单元，计算中心图像块与所有邻域图像块之间的相似性权重，最后得到的去噪图像块即邻域图像块的加权平均值．受到基于图像块的非局部理念的触发，许多非局部去噪算法被提出．例如，Aharon 等人[6]提出了一种稀疏字典学习算法，即 KSVD（K-Singular Value Decomposition）算法，它是 K 均值聚类算法的一种泛化形式．Gu 等人[7]提出了加权核范数最小化（Weighted Nuclear Norm Minimization，WNNM）算法．相比于核范数最小化算法[8]同等对待所有奇异值，WNNM 算法能对较大的奇异值进行较小的收缩处理，从而更好地保留了有效信息．

传统的脉冲噪声去除算法是对图像进行非线性滤波，例如中值滤波、自适应中值滤波、加权中值滤波等．这类非线性滤波算法虽然能够有效且快速地去除噪声，但是同时也丢失了大量细节信息．针对这一问题，许多去噪算法引入了全变分（Total Variation，TV）正则化项．例如，文献[9]结合全变分正则化项和对数形式的罚函数，提出了一个非凸优化模型用于去除脉冲噪声．

在现实生活中，加性高斯噪声和脉冲噪声通常会同时出现，称为混合噪声．上述算法虽然在单一类型噪声的去除上表现良好，但是去除混合噪声的效果十分有限．因此，混合噪声的去除也成为图像去噪领域的研究热点之一．He 等人[10]提出基于全变分正则化的低秩矩阵分解（TV-regularized Low-Rank matrix factorization，LRTV）算法，将传统的 TV 算法与核范数最小化算法进行结合，分别对各个波段进行去噪．Peng 等人[11]提出了一种改进的三维全变分（Enhanced 3D Total Variation，E-3DTV）算法，可以兼顾高光谱图像的梯度图之间的相关性和稀疏性．Jiang 等人[12]利用一种加权编码（Weighted Encoding with Sparse Nonlocal Regularization，WESNR）算法，将图像的稀疏先验与非局部相似性先验整合至一个变分框架下来进行图像去噪．Huang 等人[13]提出了一种基于非局部低秩正则化的 Laplacian 尺度混合（Laplacian Scale Modeling and Nonlocal Low-Rank regularization，LSM-NLR）模型，能够利用图像的低秩性与非局部相似性，有效地去除混合噪声．

然而，现有的许多彩色图像去噪算法是将彩色图像分成 r（红）、g（绿）和 b（蓝）3 个独立的分量，并在每个分量上分别进行去噪处理．虽然这种方式可以让很多基于灰度图像的去噪算法快速地应用于彩色图像上，但是忽略了彩色图像 3 个分量之间的相关性，从而导致去噪效果不佳．为了解决这一问题，近几年内越来越多研究将四元数引入彩色图像去噪领域，并取得了令人注目的进展．例如，Xu 等人[14]开发了一个四元数稀疏表示（K Quaternion SVD，KQSVD）模型，并将该模型应用于图像去噪、图像修复和图像超分辨率问题．Yu 等人[15]提出了基于四元数的加权核范数最小化（Quaternion-based Weighted Nuclear Norm Minimization，QWNNM）算法用于去除彩色图像上的加性高斯噪声，有效地保留了颜色分量间的内在联系，提升了去噪性能．目前大部分基于四元数的图像去噪算法都集中于解决单一类型噪声的滤除问题，而关于去除混合噪声的相关研究相对甚少．

针对以上问题，本文提出一种基于四元数非局部低秩和全变分的图像去噪（Quaternion-based Non-local Low Rank and Total Variation，QNLRTV）算法，使用图像的四元数表示来保留颜色分量间的相关性信息，同时运用图像的非局部结构相似性和局部梯度信息来进行去噪．然后，该算法利用基于四元数表示的 L_1 范数最小化问题，从数学上对 QNLRTV 模型进行推导求解，并分析该模型的收敛性．最后，本文通过仿真混合噪声和加性高斯噪声去噪实验验证 QNLRTV 算法的有效性．

2 理论基础

2.1 全变分去噪模型

全变分去噪模型[9]可以表示为

$$\min_{\boldsymbol{X}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\lambda\|\nabla \boldsymbol{X}\|_{\ell} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 分别为加噪信号和去噪信号；∇ 是梯度算子；$\lambda>0$ 是正则化参数；当 $\ell=1$ 时，$\|\nabla \boldsymbol{X}\|_{\ell}$ 被称为各向异性全变分[16]；当 $\ell=2$ 时，$\|\nabla \boldsymbol{X}\|_{\ell}$ 被称为各向同性全变分[9]．两种全变分的计算式为

$$\|\nabla \boldsymbol{X}\|_{\ell=1}=\left\|\nabla_{x} \boldsymbol{X}\right\|_{1}+\left\|\nabla_{y} \boldsymbol{X}\right\|_{1} \tag{2}$$

$$\|\nabla \boldsymbol{X}\|_{\ell=2}=\sqrt{\left\|\nabla_{x} \boldsymbol{X}\right\|_{2}^{2}+\left\|\nabla_{y} \boldsymbol{X}\right\|_{2}^{2}} \tag{3}$$

其中，∇_x 和 ∇_y 分别用来计算二维信号在 x 方向和 y 方向上的梯度．本文的去噪模型将采用各向异性全变分．

2.2 低秩矩阵逼近

已知一个二维矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^{M \times N}$,可以根据以下优化模型计算得到相应的低秩矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^{M \times N}$,即

$$\min_{\boldsymbol{X}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\lambda \cdot \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) \tag{4}$$

其中,rank(·)用来计算矩阵的秩;$\lambda>0$ 是正则化参数.由于秩函数 rank(·)的离散性,所以求解式(4)是 NP 难问题.现有的许多相关算法是将秩函数替换成核范数,通过优化式(4)的凸松弛替代函数得到 $\boldsymbol{X}$. 常用的核范数有加权核范数[7]、截断核范数[17]、加权 Schatten-γ 范数[18]等.

2.3 四元数基本理论

四元数是一种简单的超复数,由 Hamilton[19]提出.一个四元数 $\dot{q}=a+b\dot{\mathrm{i}}+c\dot{\mathrm{j}}+d\dot{\mathrm{k}} \in \boldsymbol{H}$ 包含了 1 个实部和 3 个虚部,其中 $\boldsymbol{H}$ 表示四元数集,a,b,c 和 d 是 4 个实数,$\dot{\mathrm{i}}$, $\dot{\mathrm{j}}$ 和 $\dot{\mathrm{k}}$ 是 3 个虚数单位,并且满足以下规则:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{i}}^2=\dot{\mathrm{j}}^2=\dot{\mathrm{k}}^2=\dot{\mathrm{i}}\dot{\mathrm{j}}\dot{\mathrm{k}}=-1 \\ \dot{\mathrm{i}}\dot{\mathrm{j}}=\dot{\mathrm{k}}, \dot{\mathrm{j}}\dot{\mathrm{k}}=\dot{\mathrm{i}}, \dot{\mathrm{k}}\dot{\mathrm{i}}=\dot{\mathrm{j}} \\ \dot{\mathrm{j}}\dot{\mathrm{i}}=-\dot{\mathrm{k}}, \dot{\mathrm{k}}\dot{\mathrm{j}}=-\dot{\mathrm{i}}, \dot{\mathrm{i}}\dot{\mathrm{k}}=-\dot{\mathrm{j}} \end{cases} \tag{5}$$

由以上规则可知,四元数满足加法交换律和加法结合律,但不满足乘法交换律.当 $a=0$ 时,$\dot{q}$ 被称为纯四元数.此外,四元数的共轭和模分别由以下 2 个式子给出,即

$$\bar{\dot{q}}=a-b\dot{\mathrm{i}}-c\dot{\mathrm{j}}-d\dot{\mathrm{k}} \tag{6}$$

$$|\dot{q}|=\sqrt{\dot{q}\bar{\dot{q}}}=\sqrt{\bar{\dot{q}}\dot{q}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \tag{7}$$

一个大小为 $M \times N$ 的四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{H}^{M \times N}$ 可以表示为 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1\dot{\mathrm{i}}+\boldsymbol{X}_2\dot{\mathrm{j}}+\boldsymbol{X}_3\dot{\mathrm{k}}$. 其中,$\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 和 $\boldsymbol{X}_3$ 是 4 个大小为 $M \times N$ 的实数矩阵.以下给出四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{H}^{M \times N}$ 的内积公式和 Frobenius 范数,即

$$\langle \dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{Y}} \rangle=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\overline{\dot{x}_{mn}}\,\dot{y}_{mn} \tag{8}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{X}}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\langle \dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{X}} \rangle}=\sqrt{\operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{X}})}=\sqrt{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|\dot{x}_{mn}|^2} \tag{9}$$

其中,Tr(·)用来计算矩阵的迹.

对于一幅大小为 $M \times N \times 3$ 的彩色图像 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^{M \times N \times 3}$,每一个像素都被编码为一个纯四元数,即 $\dot{x}=r\dot{\mathrm{i}}+g\dot{\mathrm{j}}+b\dot{\mathrm{k}}$,式中 r,g 和 b 分别为红绿蓝 3 个通道的像素值.由此,一个三维的彩色图像就可以用一个二维的纯四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{H}^{M \times N}$ 来表示.

3 本文去噪算法

3.1 基于四元数表示的 L_1 范数最小化问题

已知四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{H}^{M \times N}$ 和正则化参数 $\lambda>0$,关于 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 的 L_1 范数最小化问题可描述为

$$\min_{\dot{\boldsymbol{X}}} \|\dot{\boldsymbol{Y}}-\dot{\boldsymbol{X}}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\lambda\|\dot{\boldsymbol{X}}\|_{1} \tag{10}$$

为求解式(10),首先令 $\dot{x}_j \in \boldsymbol{H}$ 表示 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 的第 j 个元素,这样可以得到 $\dot{x}_j$ 的能量函数为

$$E_j=|\dot{y}_j-\dot{x}_j|^2+\lambda|\dot{x}_j| \tag{11}$$

然后求能量函数 E_j 关于 $\dot{x}_j$ 的导数为

$$\frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}_j}=\frac{\lambda\overline{\dot{x}_j}}{4|\dot{x}_j|}+\frac{\dot{x}_j-\dot{y}_j}{2} \tag{12}$$

令 $\frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}_j}=0$,得到 $\dot{x}_j/|\dot{x}_j|=\dot{y}_j/|\dot{y}_j|$. 最后,分别讨论 $|\dot{y}_j| \geqslant \lambda/2$ 和 $|\dot{y}_j|<\lambda/2$ 两种情况时 $\dot{x}_j$ 的取值,得到 $\min_{\dot{x}_j} E_j$ 最优解为

$$\dot{x}_j=\mathcal{S}_\lambda(\dot{y}_j)=\frac{\dot{y}_j}{|\dot{y}_j|}\cdot\max(|\dot{y}_j|-\lambda/2,0) \tag{13}$$

其中,$\mathcal{S}_\lambda(\cdot)$ 为四元数收缩算子.

3.2 去噪模型

如图 1 所示,QNLRTV 去噪算法流程描述如下:

(1)先将给定的噪声图像分成 K 个相互重叠的图像块,每个图像块大小为 $p \times p \times 3$,然后依次以每个图像块为中心图像块,在对应的搜索窗内找到前 m 个与中心图像块最相似的邻域图像块,并构成图像块组;

(2)将图像块组中的每个图像块的每个颜色分量拉直成长度为 p^2 列向量,可以得到一个三维实数矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^{p^2 \times m \times 3}$;

(3)将三维实数矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 转换成二维四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{H}^{p^2 \times m}$;

(4)利用 QNLRTV 去噪算法对每个二维四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{Y}}$ 进行去噪,得到去噪后的二维四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{H}^{p^2 \times m}$;

(5)将二维四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 转换成三维实数矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^{p^2 \times m \times 3}$;

(6)将所有去噪后的三维实数矩阵返回至原始位置,并对重叠区域进行加权平均,得到最终的去噪图像.

利用步骤(3)中得到的二维四元数矩阵 $\dot{\boldsymbol{Y}}=\dot{\boldsymbol{X}}+\dot{\boldsymbol{S}}+\dot{\boldsymbol{N}}$,QNLRTV 算法的去噪模型可以表示为

$$\min_{\dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{S}}} \frac{1}{2}\|\dot{\boldsymbol{Y}}-\dot{\boldsymbol{X}}-\dot{\boldsymbol{S}}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\lambda_1\|\dot{\boldsymbol{S}}\|_{1}+\lambda_2\|\dot{\boldsymbol{X}}\|_{w,*}+\lambda_3\|\nabla\dot{\boldsymbol{X}}\|_{1} \tag{14}$$

其中,$\dot{\boldsymbol{N}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{S}}$ 分别为加性高斯噪声和脉冲噪声;$\nabla=[\boldsymbol{D}_x;\boldsymbol{D}_y] \in \mathbf{R}^{2p^2 \times p^2}$, $\boldsymbol{D}_x \in \mathbf{R}^{p^2 \times p^2}$ 和 $\boldsymbol{D}_y \in \mathbf{R}^{p^2 \times p^2}$ 是梯度算子. $\|\dot{\boldsymbol{X}}\|_{w,*}=\sum_k |w_k\sigma_k|$ 用来求四元数加权核范数,σ_k 是 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 的第 k 个奇异值,权重 $w_k=C/(\sigma_k+\varepsilon)$,常数 $C=\sqrt{2m}$,

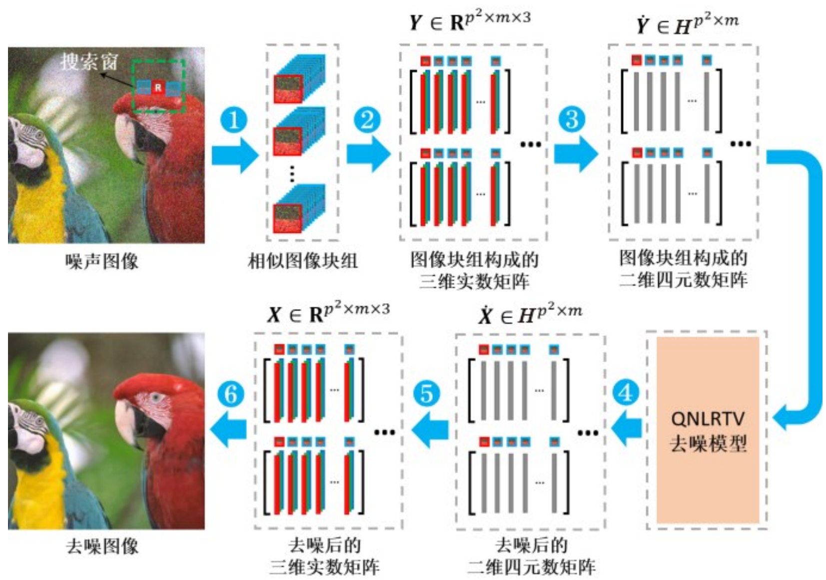


图1 QNLRTV去噪算法流程图

$\varepsilon>0$是一个很小的常量；λ_1，λ_2和λ_3为正则化参数且都大于0.

3.3 模型求解

为了求解QNLRTV去噪模型，这里引入2个辅助变量$\dot{\boldsymbol{H}}$和$\dot{\boldsymbol{L}}$，得到式(14)的增广Largrange函数为

$$\min_{\Theta=\{\dot{X},\dot{S},\dot{L},\dot{H}\},\dot{\Phi},\dot{\Psi},\beta}\Im\left(\boldsymbol{\Theta};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}},\dot{\boldsymbol{\Psi}},\beta\right) \tag{15}$$

其中，

$$\begin{aligned}\Im&\left(\boldsymbol{\Theta};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}},\dot{\boldsymbol{\Psi}},\beta\right)\\&=\frac{1}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{Y}}-\dot{\boldsymbol{X}}-\dot{\boldsymbol{S}}\right\|_F^2+\lambda_1\left\|\dot{\boldsymbol{S}}\right\|_1+\lambda_2\left\|\dot{\boldsymbol{L}}\right\|_{w,*}+\lambda_3\left\|\dot{\boldsymbol{H}}\right\|_1\\&\quad+\left\langle\dot{\boldsymbol{\Phi}},\dot{\boldsymbol{H}}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}\right\rangle+\frac{\beta}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{H}}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}\right\|_F^2\\&\quad+\left\langle\dot{\boldsymbol{\Psi}},\dot{\boldsymbol{L}}-\dot{\boldsymbol{X}}\right\rangle+\frac{\beta}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{L}}-\dot{\boldsymbol{X}}\right\|_F^2\end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\Phi}}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}$是增广拉格朗日乘子；β是惩罚因子．之后利用交替方向乘子法求解式(16)，即先优化一个变量同时固定其他变量，交替进行，直至收敛．初始化相关变量，第$t+1$次迭代计算过程如下：

(1)求解$\dot{\boldsymbol{X}}$，即

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}=&\left[\boldsymbol{I}_{p^2}+\beta^{(t)}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\nabla+\boldsymbol{I}_{p^2}\right)\right]^{-1}\\&\times\left[\dot{\boldsymbol{Y}}-\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}+\nabla^{\mathrm{T}}\left(\beta^{(t)}\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}+\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right)+\beta^{(t)}\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right]\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{I}_{p^2}\in\mathbf{R}^{p^2\times p^2}$是单位矩阵．

(2)求解$\dot{\boldsymbol{L}}$，即利用四元数奇异值分解[20]，可以求得

$$\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}=\dot{\boldsymbol{U}}^{(t+1)}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(t+1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(t+1)}\right)^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

其中，

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(t+1)}=\mathrm{diag}\left(\tilde{\sigma}_1^{(t+1)},\tilde{\sigma}_2^{(t+1)},\cdots,\tilde{\sigma}_m^{(t+1)}\right) \tag{19}$$

$$\tilde{\sigma}_k^{(t+1)}=\max\left[\sigma_k^{(t+1)}-w_k^{(t+1)}\lambda_2/\beta^{(t)},\ 0\right] \tag{20}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{(t+1)}\right)^{\mathrm{H}}\left(\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}/\beta^{(t)}\right)\dot{\boldsymbol{V}}^{(t+1)}=\boldsymbol{\Sigma}^{(t+1)} \tag{21}$$

$\boldsymbol{\Sigma}^{(t+1)}=\mathrm{diag}\left(\sigma_1^{(t+1)},\sigma_2^{(t+1)},\cdots,\sigma_m^{(t+1)}\right)$是一个实对角矩阵，$\sigma_1^{(t+1)}\geqslant\sigma_2^{(t+1)}\geqslant\cdots\geqslant\sigma_m^{(t+1)}>0$是矩阵$\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}/\beta^{(t)}$的$m$个奇异值，$\dot{\boldsymbol{U}}^{(t+1)}\in\boldsymbol{H}^{M\times M}$和$\dot{\boldsymbol{V}}^{(t+1)}\in\boldsymbol{H}^{N\times N}$是酉矩阵．

(3)求解$\dot{\boldsymbol{H}}$，即

$$\dot{h}_i^{(t+1)}=\mathcal{S}_{2\lambda_3/\beta^{(t)}}\left(\nabla\dot{x}_i^{(t+1)}-\dot{\phi}_i^{(t)}/\beta^{(t)}\right) \tag{22}$$

其中，$\dot{x}_i$，$\dot{h}_i$和$\dot{\phi}_i$分别是矩阵$\dot{\boldsymbol{X}}$，$\dot{\boldsymbol{H}}$和$\dot{\boldsymbol{\Phi}}$中的第i个元素．

(4)求解$\dot{\boldsymbol{S}}$，即

$$\dot{s}_i^{(t+1)}=\mathcal{S}_{4\lambda_1}\left(\dot{y}_i-\dot{x}_i^{(t+1)}\right) \tag{23}$$

其中，$\dot{y}_i$和$\dot{s}_i$分别是矩阵$\dot{\boldsymbol{Y}}$和$\dot{\boldsymbol{S}}$中的第i个元素．

(5)求解$\dot{\boldsymbol{\Phi}}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}$，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}+\beta^{(t)}\left(\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right)\\\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}=\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}+\beta^{(t)}\left(\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right)\end{cases} \tag{24}$$

(6)求解β，即

$$\beta^{(t+1)}=\tau\beta^{(t)} \tag{25}$$

其中，参数$\tau>1$用来加速收敛．

值得注意的是，在迭代过程中，变量$\dot{\boldsymbol{X}}$，$\dot{\boldsymbol{L}}$，$\dot{\boldsymbol{H}}$，$\dot{\boldsymbol{S}}$，$\dot{\boldsymbol{\Phi}}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}$的实部始终为0．由于初始化变量$\dot{\boldsymbol{S}}^{(0)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}^{(0)}$，$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(0)}$，$\dot{\boldsymbol{L}}^{(0)}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(0)}$都为纯四元数矩阵，所以$\dot{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(0)}/\beta^{(0)}$也是纯四元数矩阵．因为$\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}$是半正定阵，可得$\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}$是实数阵，而$\dot{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(0)}/\beta^{(0)}=\dot{\boldsymbol{U}}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}$，所以$\dot{\boldsymbol{U}}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}$是纯四元数矩阵，进而得到$\dot{\boldsymbol{L}}^{(1)}=$

$\dot{\boldsymbol{U}}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(1)}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}$也是纯四元数矩阵. 此外,由于其他变量的解都是四元数矩阵的线性组合,所以在当前迭代中它们的实部依然为0. 因此,第t次迭代求解得到的$\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}$, $\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}$, $\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}$, $\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}$, $\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}$依然为纯四元数矩阵.

3.4　收敛性分析

定理1　式(15)中,$\left\{\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}\right\}$和$\left\{\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}\right\}$是收敛序列,且满足

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\left\|\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}=0\\&\lim_{t\to\infty}\left\|\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}=0\end{aligned}\tag{26}$$

证明　首先,利用式(18)、式(22)和式(24),得到

$$\begin{aligned}\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}&=\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}+\beta^{(t)}\left(\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right)\right\|_{\mathrm{F}}\\&=\beta^{(t)}\left\|\mathcal{S}_{2\lambda_3/\beta^{(t)}}\left(\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}/\beta^{(t)}\right)-\left(\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}/\beta^{(t)}\right)\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leqslant\sqrt{mp^2}\,\lambda_3\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}&=\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}+\beta^{(t)}\left(\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right)\right\|_{\mathrm{F}}\\&=\beta^{(t)}\left\|\operatorname{diag}\left(\sigma_1^{(t+1)}-\tilde{\sigma}_1^{(t+1)},\cdots,\sigma_m^{(t+1)}-\tilde{\sigma}_m^{(t+1)}\right)\right\|_{\mathrm{F}}\\&\leqslant\lambda_2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(w_k)^2}\end{aligned}\tag{28}$$

所以,序列$\left\{\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right\}$和$\left\{\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right\}$是有界的,从而可以得到$\left\{\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}\right\}$和$\left\{\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}\right\}$也是有界的,并令$a>0$为这两个序列的上界. 因为$\boldsymbol{\Theta}^{(t+2)}$是函数$\Im\left(\boldsymbol{\Theta};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)},\beta^{(t+1)}\right)$的全局最优解,所以有

$$\begin{aligned}&\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t+2)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)},\beta^{(t+1)}\right)\\&\quad\leqslant\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t+1)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)},\beta^{(t+1)}\right)\\&\quad\leqslant\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t+1)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)},\beta^{(t)}\right)\\&\qquad+\frac{\beta^{(t)}+\beta^{(t+1)}}{2\left(\beta^{(t)}\right)^2}\left(\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\\&\quad\leqslant\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(1)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(0)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(0)},\beta^{(0)}\right)+\frac{2a^2}{\beta^{(0)}}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{\tau^{t-1}}<\infty\end{aligned}\tag{29}$$

因此,函数序列$\left\{\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t+1)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)},\beta^{(t)}\right)\right\}$是有界的,进一步推出$\left\{\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}\right\}$和$\left\{\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}\right\}$都是有界序列. 然后,利用四元数Taylor级数展开[21]和四元数凸函数[22]的性质,可以得到,存在$a_i>0\,(i=1,2,3,4)$使以下不等式成立:

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\frac{a_2}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&\quad+\frac{a_3}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\frac{a_4}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{S}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&\leqslant\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)},\beta^{(t)}\right)-\Im\left(\boldsymbol{\Theta}^{(t+1)};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)},\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)},\beta^{(t+1)}\right)\\&\quad+\frac{\beta^{(t)}+\beta^{(t+1)}}{2\left(\beta^{(t)}\right)^2}\left(\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)\end{aligned}\tag{30}$$

由于$\Im\left(\boldsymbol{\Theta};\ \dot{\boldsymbol{\Phi}},\dot{\boldsymbol{\Psi}},\beta\right)\geqslant0$,得到

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left\{\begin{aligned}&\frac{a_1}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\frac{a_2}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&+\frac{a_3}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\frac{a_4}{2}\left\|\dot{\boldsymbol{S}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}^2\end{aligned}\right\}<+\infty\tag{31}$$

因此,序列$\left\{\dot{\boldsymbol{X}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{S}}^{(t)}\right\}$, $\left\{\dot{\boldsymbol{H}}^{(t)}\right\}$和$\left\{\dot{\boldsymbol{L}}^{(t)}\right\}$是收敛的,以及有

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\dot{\boldsymbol{H}}^{(t+1)}-\nabla\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\beta^{(t)}}\left\|\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}=0\tag{32}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\dot{\boldsymbol{L}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{X}}^{(t+1)}\right\|_{\mathrm{F}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\beta^{(t)}}\left\|\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t+1)}-\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(t)}\right\|_{\mathrm{F}}=0\tag{33}$$

证毕.

3.5　时间复杂度分析

根据式(17)~(25)可得,每次迭代求解变量$\dot{\boldsymbol{X}}$, $\dot{\boldsymbol{L}}$和$\dot{\boldsymbol{H}}$的时间复杂3度分别为$O\left(mp^4+p^6\right)$, $O\left(mp^4+m^2p^2\right)$和$O\left(mp^4\right)$,求解变量$\dot{\boldsymbol{S}}$, $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$和$\dot{\boldsymbol{\Psi}}$的时间复杂度均为$O\left(mp^2\right)$,更新β的时间复杂度为$O(1)$. 因此,QNLRTV算法的时间复杂度为$O\left(KT\left(mp^4+m^2p^2+p^6\right)\right)$,其中,$T$为迭代总次数,$K$为图像所包含的互相重叠的图像块总数.

4　实验结果与分析

4.1　实验设置

为了测试QNLRTV算法的去噪效果,本文使用对比算法包括WNNM算法[7]、KSVD算法[6]、KQSVD算法[15]、QWNNM算法[16]、E-3DTV算法[12]、LRTV算法[11]、WESNR算法[13]和LSM-NLR算法[14]. 对于WNNM算法、KSVD算法、KQSVD算法和QWNNM算法这4个针对加性高斯噪声的去噪算法,先使用自适应中值滤波去除椒盐噪声. 软件平台采用Matlab R2016b,硬件平台采用Intel Core (TM) i7-7700U CPU处理器,16 GB内存,Windows 10操作系统. 测试数据集包括CBSD68数据库[23]中的68幅图像和

Kodak24数据库中的24幅图像，共92幅原始图像，分别给这些图像添加加性高斯-椒盐混合噪声，实验中选定的6种噪声强度$[\sigma,d]$分别为[10,10%]，[10,30%]，[30,10%]，[30,30%]，[50,10%]和[50,30%]．此外，为了评估QNLRTV算法在加性高斯噪声下的去噪性能，选定3种噪声强度$\sigma=10,30,50$. 其中，σ和d分别表示加性高斯噪声标准差和椒盐噪声密度．根据文献[7,24]，当σ分别为10，30，50时，QNLRTV算法中图像块边长p分别设置为6，7，8，相似块数量m分别设为70，90，120，参数λ_2和τ分别设为0.5和1.5. 其他对比算法则按照相关文献进行参数设置．定量评价指标采用峰值信噪比（Peak Signal-to-Noise Ratio，PSNR）和结构相似性（Structural Similarity，SSIM），相应的数学计算式为

$$\mathrm{PSNR}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=10\log_{10}\left(\frac{\max_{\boldsymbol{X}}^2\cdot MN}{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_{\mathrm{F}}^2}\right) \tag{34}$$

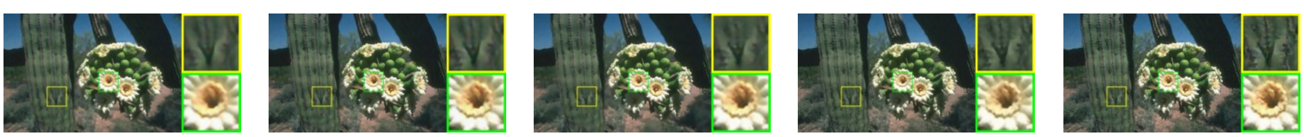
$$\mathrm{SSIM}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{MN}\frac{\left(2\mu_{x_{i+\cdot}}\mu_{y_{i+\cdot}}+c_1\right)\left(2\sigma_{x_{i+\cdot}y_{i+\cdot}}+c_2\right)}{\left(\mu_{x_{i+\cdot}}^2+\mu_{y_{i+\cdot}}^2+c_1\right)\left(\sigma_{x_{i+\cdot}}^2+\sigma_{y_{i+\cdot}}^2+c_2\right)} \tag{35}$$

其中，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{M\times N}$分别为目标图像和参考图像；$\max_{\boldsymbol{X}}$表示图像$\boldsymbol{X}$的最大灰度值；$x_{i+\cdot}$和$y_{i+\cdot}$分别表示图像$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$中以第$i$个像素为中心的图像块；$\mu_{x_{i+\cdot}}$，$\mu_{y_{i+\cdot}}$，$\sigma_{x_{i+\cdot}}^2$和$\sigma_{y_{i+\cdot}}^2$分别为图像块$x_{i+\cdot}$和$y_{i+\cdot}$的平均灰度值和方差；$\sigma_{x_{i+\cdot}y_{i+\cdot}}$为两个图像块的协方差；$c_1$和$c_2$是常量．

4.2　实验结果

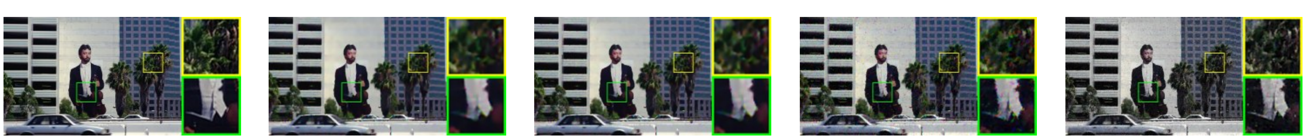
QNLRTV算法与其他对比算法的去噪视觉效果如图2~4所示．根据放大的细节图可以看出，KSVD算法、WNNM算法、WESNR算法、LSM-NLR算法、KQSVD算法和QWNNM算法在一些边缘丰富的区域（如仙人掌纹路、树枝树叶和花蕊等区域），损失了较多的图像细节信息，造成去噪图像过平滑．LRTV算法和E-3DTV算法虽然保留了更多的细节，但在平坦区域（如天空、前面和湖面等区域）有残留伪影和噪声，并且噪声强度越大，伪影越明显．此外，E-3DTV算法还丢失了颜色信息，例如从仙人掌、树叶和城堡顶部的放大图像中可以看出，E-3DTV算法的去噪图像比未加噪图像更偏灰色．相比之下，QNLRTV算法不仅更有效地去除了噪声，而且保持了更多的细节信息和颜色信息，使其去噪后的图像更接近未加噪的原始图像．

(*a*)　未加噪图片　(*b*)　KSVD算法　(*c*)　WNNM算法　(*d*)　LRTV算法　(*e*)　E-3DTV算法

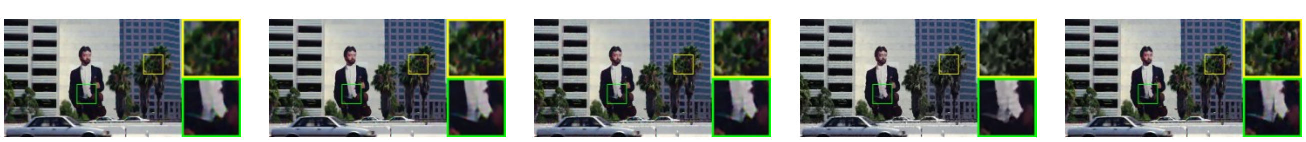


(*f*)　WESNR算法　(*g*)　LSM-NLR算法　(*h*)　KQSVD算法　(*i*)　QWNNM算法　(*j*)　QNLRTV算法

图2　噪声强度$[\sigma,d]$为[10,10%]时的去噪图像



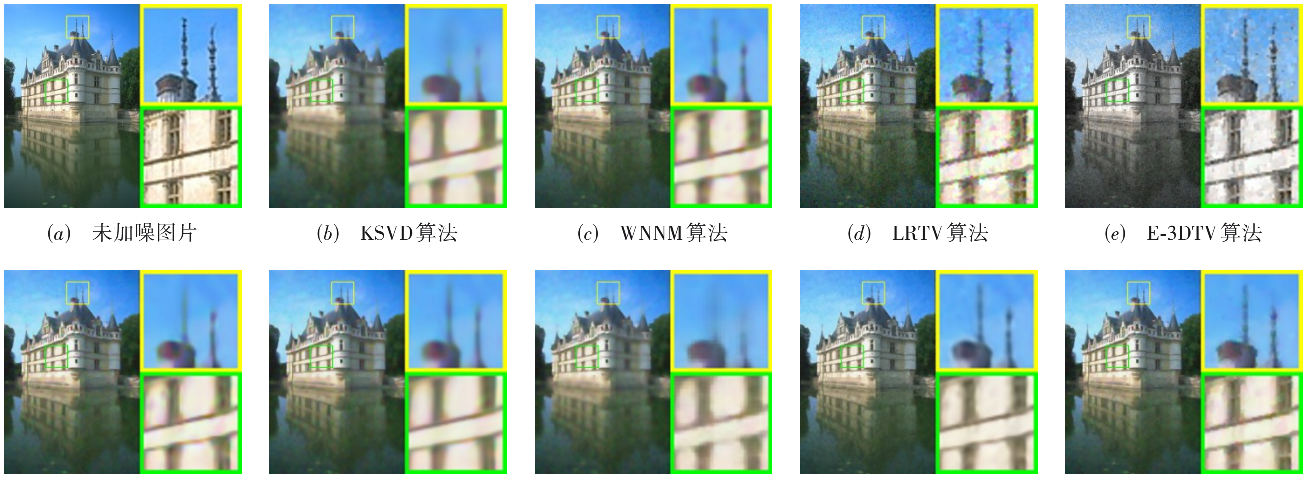
(*a*)　未加噪图片　(*b*)　KSVD算法　(*c*)　WNNM算法　(*d*)　LRTV算法　(*e*)　E-3DTV算法



(*f*)　WESNR算法　(*g*)　LSM-NLR算法　(*h*)　KQSVD算法　(*i*)　QWNNM算法　(*j*)　QNLRTV算法

图3　噪声强度为$[\sigma,d]$为[10,30%]时的去噪图像

图5展示了混合噪声情况下QNLRTV算法及对比算法在测试数据集上的平均ΔPSNR值和平均ΔSSIM值，X轴显示了混合噪声强度．其中，ΔPSNR（或ΔSSIM）表示某个去噪图像的PSNR（或SSIM）与对应噪声图像的PSNR（或SSIM）之差，平均ΔPSNR（或平均ΔSSIM）则表示在特定噪声强度下去噪算法对数据集中



(*a*)　未加噪图片　(*b*)　KSVD 算法　(*c*)　WNNM 算法　(*d*)　LRTV 算法　(*e*)　E-3DTV 算法

(*f*)　WESNR 算法　(*g*)　LSM-NLR 算法　(*h*)　KQSVD 算法　(*i*)　QWNNM 算法　(*j*)　QNLRTV 算法

图 4　噪声强度为$[\sigma,d]$为$[30,10\%]$时的去噪图像

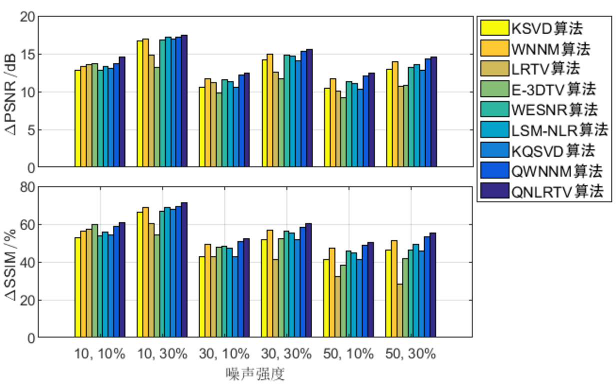


图 5　去除混合噪声后的平均 ΔPSNR 和平均 ΔSSIM

所有噪声图像进行去噪后得到的 ΔPSNR(或 ΔSSIM)的平均值. 由图可知,QNLRTV 算法在所有噪声强度上的平均 ΔPSNR 和平均 ΔSSIM 是最高的,高出 QWNNM 算法约 0.31 dB 和 1.74%,超出 E-3DTV 算法约 3.04 dB 和 9.36%,比 LSM-NLR 算法提升了约 0.93 dB 和 4.85%.

为了评估算法在加性高斯噪声情况下的去噪性能,表 1 展示了 QNLRTV-GN 算法及其他 5 个对比算法在 20 幅随机选择测试图像上的平均 ΔPSNR 值和平均 ΔSSIM 值. 其中,QNLRTV-GN 算法是通过 QNLRTV 模型去掉针对脉冲噪声的约束项后得到的,即式(14)去掉正则项 $\lambda_1\|\dot{\boldsymbol{S}}\|_1$,并令 $\dot{\boldsymbol{S}}=0$. 由表可知,QNLRTV 算法在 3 种噪声强度下的平均 ΔPSNR 和平均 ΔSSIM 略优于对比算法,比 QWNNM 算法高出约 0.21 dB 和 1.51%,比 WNNM 算法高出约 2.00 dB 和 5.86%,比 LSM-NLR 算法高出约 1.83 dB 和 7.58%.

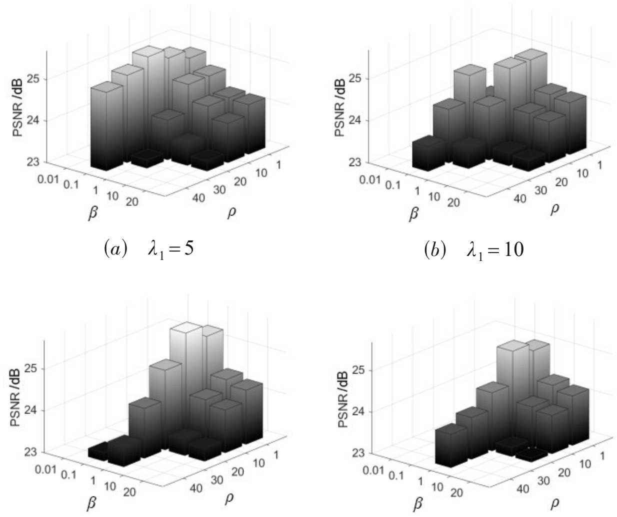
表 1　去除加性噪声后的平均 ΔPSNR 和平均 ΔSSIM

算法	10 dB		30 dB		50 dB	
	平均 ΔPSNR/dB	平均 ΔSSIM/%	平均 ΔPSNR/dB	平均 ΔSSIM/%	平均 ΔPSNR/dB	平均 ΔSSIM/%
KSVD 算法	4.92	20.83	8.08	41.38	9.12	42.79
WNNM 算法	5.44	21.68	8.88	45.14	10.26	49.01
LSM-NLR 算法	4.73	20.57	8.70	43.16	10.16	45.94
KQSVD 算法	4.63	21.16	8.43	42.94	9.23	43.09
QWNNM 算法	7.34	24.30	10.31	50.30	11.31	54.26
QNLRTV-GN 算法	7.47	25.59	10.52	51.78	11.59	56.03

4.3　模型分析

QNLRTV 算法中需要调试的参数分别是正则化参数 λ_1,λ_3 和惩罚因子 β. 以噪声强度 $[\sigma,d]=[10,10\%]$ 时的调参过程为例,图 6 和图 7 分别显示了 QNLRTV 算法使用不同参数值在迭代 50 次后的 PSNR 和 SSIM 的变化. 其中, $\lambda_1=5,10,20,30$, $\beta=0.01,0.1,1,10,20$, $\rho=\lambda_3/\beta$ 的取值为 1,10,20,30,40, PSNR 结果的显示范围统一设为 [23,25.7], SSIM 结果的显示范围设为 [65%,78%]. 由图可知,将参数设为 $\lambda_1=20,\beta=1,\rho=10$ 时,QNLRTV 算法可以得到最佳 PSNR 和 SSIM 结果. 因此,使用类似的方法,可以得到 QNLRTV 算法在其他噪声强度下的参数设置如下:当 $\sigma=10$ 时,$\lambda_1=20,\beta=1,\rho=10$;当 $\sigma=30$ 时,$\lambda_1=30,\beta=1,\rho=30$;当 $\sigma=50$ 时,$\lambda_1=50,\beta=1,\rho=50$.

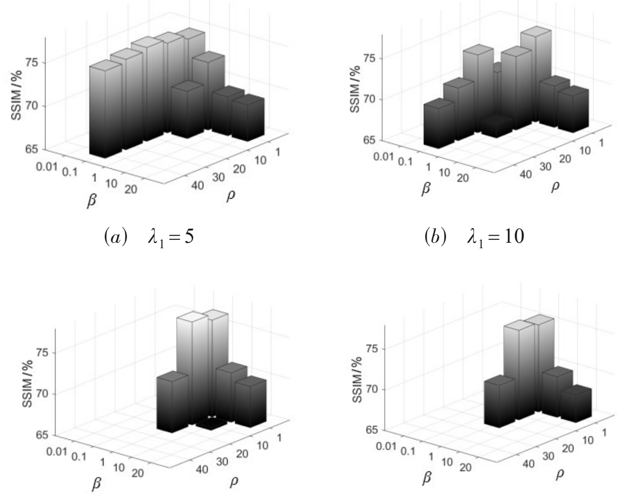
从测试数据集中随机选择 10 幅图像,计算 QNLRTV 算法在不同混合噪声强度下每次迭代的平均



(a) $\lambda_1=5$　(b) $\lambda_1=10$

(c) $\lambda_1=20$　(d) $\lambda_1=30$

图6　不同参数值对PSNR的影响



(a) $\lambda_1=5$　(b) $\lambda_1=10$

(c) $\lambda_1=20$　(d) $\lambda_1=30$

图7　不同参数值对SSIM的影响

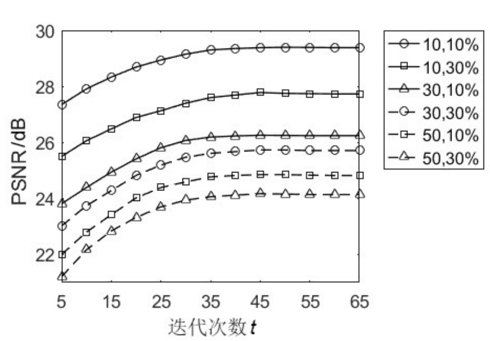


图8　QNLRTV的PSNR随迭代次数增加的变化情况

PSNR值,其变化曲线如图8所示. 可以看出,当迭代次数大于35时,PSNR值趋于稳定. 因此,QNLRTV算法具有较好的稳定性和收敛性.

5　结论

本文针对许多传统的彩色图像去噪算法忽略了颜色分量间的相关性以及侧重于去除单一类型噪声的问题,提出了一种基于四元数的混合噪声去噪(QNLRTV)算法. QNLRTV算法利用一个纯四元数表示彩色图像像素,考虑了颜色分量间的关联性,将整幅图像作为一个整体进行处理. 此外,QNLRTV算法还结合了图像的非局部相似性和局部梯度信息来处理噪声. 通过将QNLRTV算法与不同的先进去噪算法进行定量和定性比较,可以看出,在大部分模拟噪声强度下,QNLRTV算法获得了更高的评价指标值和更优的视觉效果. 在下一步工作中,拟通过分析真实图像噪声,对基于四元数的图像块相似性测量方式进行优化,进一步提升去噪模型的有效性与实用性.

参考文献

[1] 吴绿, 张馨月, 唐茉, 等. Focus+Context语义表征的场景图像分割[J]. 电子学报, 2021, 49(3): 596-604.
WU L, ZHANG X Y, TANG M, et al. Focus+Context semantic representation in scene segmentation[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(3): 596-604. (in Chinese)

[2] 徐少平, 林珍玉, 张贵珍, 等. 采用深度学习与图像融合混合实现策略的低照度图像增强算法[J]. 电子学报, 2021, 49(1): 72-76.
XU S P, LIN Z Y, ZHANG G Z, et al. A low-light image enhancement algorithm using the hybrid strategy of deep learning and image fusion[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(1): 72-76. (in Chinese)

[3] 毛林, 赵利强, 于明安, 等. 融合先验知识特征的超声图像甲状旁腺结节识别[J]. 电子学报, 2021, 49(5): 944-952.
MAO L, ZHAO L Q, YU M G, et al. Recognition of parathyroid nodule by fusing prior knowledge features in ultrasound image[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(5): 944-952. (in Chinese)

[4] 黄鸿, 徐科杰, 石光耀. 联合多尺度多特征的高分遥感图像场景分类[J]. 电子学报, 2020, 48(9): 1824-1833.
HUANG H, XU K J, SHI G Y. Scene classification of high-resolution remote sensing image by multi-scale and multi-feature fusion[J]. Acta Electronica Sinica, 2020, 48(9): 1824-1833. (in Chinese)

[5] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Diego: IEEE, 2005: 60-65.

[6] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.

[7] GU S H, XIE Q, MENG D Y, et al. Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision [J]. International Journal of Computer Vision, 2017, 121 (2): 183-208.

[8] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.

[9] ZHANG B X, ZHU G P, ZHU Z B. A TV-log nonconvex approach for image deblurring with impulsive noise[J]. Signal Processing, 2020, 174: 107631.

[10] HE W, ZHANG H Y, ZHANG L P, et al. Total-variation-regularized low-rank matrix factorization for hyperspectral image restoration[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(1): 178-188.

[11] PENG J J, XIE Q, ZHAO Q, et al. Enhanced 3DTV regularization and its applications on HSI denoising and compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 7889-7903.

[12] JIANG J L, ZHANG L, YANG J. Mixed noise removal by weighted encoding with sparse nonlocal regularization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(6): 2651-2662.

[13] HUANG T, DONG W S, XIE X M, et al. Mixed noise removal via Laplacian scale mixture modeling and nonlocal low-rank approximation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 26(7): 3171-3186.

[14] XU Y, YU L C, XU H T, et al. Vector sparse representation of color image using quaternion matrix analysis[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(4): 1315-1329.

[15] YU Y B, ZHANG Y L, YUAN S F. Quaternion-based weighted nuclear norm minimization for color image denoising[J]. Neurocomputing, 2019, 332: 283-297.

[16] YAN J, LU W S. Image denoising by generalized total variation regularization and least squares fidelity[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2015, 26 (1): 243-266.

[17] HU Y, ZHANG D B, YE J P, et al. Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(9): 2117-2130.

[18] XIE Y, GU S H, LIU Y, et al. Weighted schatten p-norm minimization for image denoising and background subtraction[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(10): 4842-4857.

[19] HAMILTON W R. II. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1844, 25(163): 10-13.

[20] CHEN Y Y, XIAO X L, ZHOU Y C. Low-rank quaternion approximation for color image processing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 1426-1439.

[21] XU D P, XIA Y L, MANDIC D P. Optimization in quaternion dynamic systems: Gradient, hessian, and learning algorithms[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(2): 249-261.

[22] LIU Y, ZHENG Y L, LU J Q, et al. Constrained quaternion-variable convex optimization: A quaternion-valued recurrent neural network approach[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(3): 1022-1035.

[23] MARTIN D, FOWLKES C, TAL D, et al. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics[C]//Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. Vancouver: IEEE, 2001: 416-423.

[24] KONG Z M, YANG X W. Color image and multispectral image denoising using block diagonal representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(9): 4247-4259.

作者简介

李潇瑶 女,1990年7月出生,湖南永州人.2012年在中国石油大学(北京)获得理学学士学位,现为湖南大学电气与信息工程学院硕博连读生.2017年进入澳门大学计算机与信息科学系视觉与图像处理实验室担任科研助理至今.主要研究方向为图像处理和计算机视觉.

E-mail: houye0731@hnu.edu.cn

王炼红(通讯作者) 女,1971年5月出生,湖南宁乡人.副教授,硕士生导师.分别于1993年、2002年和2009年在湖南大学获得工学学士、硕士和博士学位.2011年3月至2012年3月在美国布兰迪斯大学做访问学者.主要研究方向为信号处理、数据挖掘技术、现代网络与通信技术.

E-mail: 292386791@qq.com